Title	アーベル多様体上の semi-homogeneous vector bundle について
Author(s)	向井, 茂
Citation	代数幾何学シンポジューム記録 (1977), 1977: 128-143
Issue Date	1977
URL	http://hdl.handle.net/2433/201936
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

代数幾何学シンポジウム記録
1977年度　pp.128-143

アーベル多様体上の semi-homogeneous vector bundle について

向井　茂（京大理）

§0. k を任意標数 p ($\geqq 0$) の代数的閉体、X を k 上の g 次元アーベル多様体とする。X 上の直線束に関してはよく研究され豊富な結果が得られているが、X 上のベクトル束一般については特殊な場合を除くとまだよくわかっていない。

X の点 x に対して X の x による平行移動
$X \ni y \longmapsto y+x \in X$ を T_x でもって表わす。T_x は X の（多様体としての）自己同型である。

__定義 1__. X 上のベクトル束 E が semi-homogeneous（以下 s.h. と略す）$\Longleftrightarrow$ 任意の点 $x \in X$ に対してある X 上の直線束 L が存在して

$T_x^*(E) \cong E \otimes L$ となる。

以下で述べるのは X 上の s.h. ベクトル束に関して得られた結果の報告である。先ず§1

では $g=1$ の場合について述べる。 $g>1$ のとき s.h. ベクトル束は非常に特殊なものである。特に単純な s.h. ベクトル束は全て直線束から同種写像による順像をとることによって得られる。これによって、小田、森川両氏による結果の $p>0$ への一般化がえられる（定理1）。単純な s.h. ベクトル束は $g>1$ のとき、その階数も Euler-Poincaré 標数も限られたものになる（定理2）。§3では一般の s.h. ベクトル束に関して述べる。森本、松島両氏による homogeneous ベクトル束に関する結果（の一部）が、s.h. ベクトルに対して拡張される（定理3）。

証明に関してはほとんど述べられないので［3］を参照されたい。

<u>記号</u>. X 上のベクトル束（局所自由層）E に対してその階数を $r(E)$ で、また最高（$=r(E)$）次の外積を $\det(E)$ でもって表わす。E が直既約であるとは、E が自明でない直和分解をもたないことである。また、E が単純

であるとは、Eの$\mathcal{O}_X$—自己準同型が定数倍写像しかない（$\mathrm{End}_{\mathcal{O}_X}(E) \cong k$）ことである。明らかに、単純なベクトル束は直既約である。任意の直線束は単純である。

任意の点$x \in X$に対して$T_x^*(E) \cong E$となるとき、ベクトル束Eはhomogeneousであるという。直線束Lに関しては、

$$\begin{aligned} L\text{が homogeneous} &\iff L\text{は代数的に}\mathcal{O}_X\text{と同値} \\ &\iff L\text{は数値的に}\mathcal{O}_X\text{と同値} \end{aligned}$$

が成立する。上の同値な条件を満たす直線束からなる$\mathrm{Pic}(X)$の部分群を$\mathrm{Pic}^0(X)$で表わす。商群$NS(X) = \mathrm{Pic}(X)/\mathrm{Pic}^0(X)$は階数有限の自由加群であることが知られている。直線束Lに対しそのNS(X)での同値類を[L]で表わす。また、ベクトル束Eに対して

$$\frac{[\det(E)]}{r(E)} \in NS(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

を$\delta(E)$でもって表わす。容易にわかるように$\delta(E \otimes F) = \delta(E) + \delta(F)$, $\delta(E^\vee) = -\delta(E)$が成立する。但し、$E^\vee$はEの双対束である。

§1 $g=1$ のとき、X上のベクトル束はAtiyahによって分類された。主なものから以下必要なものをまとめておく。

任意の自然数 r と整数 d の組 (r,d) に対して、

$\mathcal{E}(r,d)=\{E\,;\,E$ はX上の直既約なベクトル束で $r(E)=r$, $\deg(E)=d$ を満たす$\}$ /(同型)

とおく。(但し、$\deg(E)$ とは $\det(E)$ の次数である。)

(A) $\mathcal{E}(r,d)$ は空でない。

(B) $\mathcal{E}(r,d)$ に属するベクトル束をEとすると、他の $\mathcal{E}(r,d)$ の元は全てEと次数0のある直線束Lとのテンサー積 $E\otimes L$ と同型である。また、$E\otimes L\cong E\otimes L' \Leftrightarrow L^{\otimes r'}\cong L'^{\otimes r'}$ が成り立つ。但し、$r'=r/(r,d)$。

(C) $\mathcal{E}(r,0)$ には $H^0(X,F_r)\neq 0$ を満たす元 F_r が唯一つ存在する。

(D) $\mathcal{E}(r,d)$ に属するベクトル束が単純 $\Leftrightarrow (r,d)=1$。

E と $T_x^*(E)$ は同じ階数で同じ次数をもつから (B) より X 上の直既約なベクトル束は全て s.h. である。また、(B), (C) より E が直既約であるとき、"E が homogeneous $\Leftrightarrow$ $\deg(E) = 0$" であることもわかる。一般には、

<u>命題 1</u>. $E \cong \bigoplus_i E_i$ (各 E_i は直既約) とするとき、

(1) E が s.h. $\Leftrightarrow$ 各 i, j に対して $\delta(E_i) = \delta(E_j)$ $(= \delta(E))$,

(2) E が homogeneous $\Leftrightarrow$ 各 i に対して $\delta(E_i) = 0$。

がえられる。このように s.h. であるという性質は $g = 1$ のときは弱い条件である。

§2　先に述べた (A) を証明するのに Atiyah の使った方法は順次直線束でもって extension を作っていくというものであった。小田氏は $(r, d)=1$ ならば次の方法 (*) でもって $\mathcal{E}(r, d)$ に属するベクトル束が構成できることを示した。

(*)　$\pi: Y \to X$ をアーベル多様体の間の同種写像（$\mathrm{Ker}(\pi)$ が有限集合であるような準同型），L を Y 上の直線束とするとき，$E = \pi_*(L)$ は階数が $\deg(\pi)$ の X 上のベクトル束である。

なお，上の E が単純になる為の必要十分条件は

(**)　$\mathrm{Ker}(\pi) \cap K(L) = (0)$　（但，$p>0$ のときは Ker, K(L), ∩ は全てスキーム論的なものと解釈する。集合としては K(L) は $\{y \in Y \mid T_y^*(L) \cong L\}$ のことである。）

で与えられる。

一般には次の命題により，(*) の方法で得られるベクトル束は常に s.h. である。

命題2　$\pi: Y \to X$ を同種写像とする。F が Y 上の s.h. ベクトル束であるならば、$\pi_*(F)$ は X 上の s.h. ベクトル束である。

一般には s.h. ベクトル束は必ずしも (*) の方法で得られるとは限らない。また、E が s.h. ならば $End_{\mathcal{O}_X}(E)$（E の $\mathcal{O}_X$-自己同型の芽によってつくられる層。$E \otimes E^\vee$ と同型である。）は homogeneous であるが、その逆は一般にはわからない。しかし、E が単純なときには次の定理が成り立つ。

定理1　E を X 上の単純なベクトル束とするとき、次の諸条件は互いに同値である。

(1)　E は s.h. である。

(2)　$End_{\mathcal{O}_X}(E)$ は homogeneous である。

(3)　$h^1(X, End_{\mathcal{O}_X}(E)) = g$

(4)　$h^j(X, End_{\mathcal{O}_X}(E)) = \binom{g}{j}$　　$j = 0, 1, \cdots, g$.

(5)　ある同種写像 $\pi: Y \to X$ と Y 上の直線束があって、$E \cong \pi_*(L)$ となる。

(3) と (5) の同値性は $k=\mathbb{C}$ のとき小田[4]で証明された。(そこでは (3) ⇒ (5) で森川氏の結果が本質的である。) (3) の条件は簡明であるが、一般の単純なベクトル束Eに対しては $h^1(X, \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(E)) \geq g$ が成立する。$H^1(X, \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(E))$ はEのモジュライの接空間と同型であるから (3) は単純な s.h. ベクトル束のモジュライは非常に小さい(本質的には $\{E \otimes L ;\ L \in \mathrm{Pic}^\circ(X)\}$ で尽くされる) ことを示している。ベクトル束Eに対して $i ; \mathcal{O}_X \to \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(E)$ を自然な単射とする。$p=0$ のとき条件 (3) は $H^1(i)$ が同型であることと同値であるが、$p>0$ のときは次の命題が成立する。

<u>命題 3</u>　$p>0$ で E は単純な s.h. ベクトル束であるとする。

(1) $H^1(i) : H^1(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(E))$ が全単射 ⇔ $(r(E), p)=1$ ⇔ 各 j に対して $H^j(i)$ は全単射。

(2) X の p-rank が最大 $(=g)$ のときは、定

理の(5)の中の元として分離的なものがとれる。

単純なa.h.ベクトル束は $\delta(E)$ でほぼ決定される。すなわち、次の定理が成り立つ。

<u>定理 2</u>　δ を $NS(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ の元とする。

(1)　$\delta(E)=\delta$ を満たす X 上の単純なa.h.ベクトル束 $E=E_\delta$ が存在する。

(2)　$\delta(E')=\delta$ を満たす X 上の単純なa.h.ベクトル束は適当な $L\in Pic^{\circ}(X)$ に対して $E\otimes L$ と同型である。

(3)　$r(E)$, $\chi(E)$ は次の通りである。

$\delta=\frac{[L]}{l}$ (l は自然数) と表わされているとする。h を群スキーム $X_l\cap K(L)$ の位数とする。但し、X_l は l 倍写像 $l_X;X\to X$ のスキーム論的kernelである。h は平方数で、上の $E=E_\delta$ に対して

$$r(E)=l^g/\sqrt{h}\qquad \chi(E)=\chi(L)/\sqrt{h}$$

が成り立つ。(上式の右辺が l, L のとり方によらないことは容易にわかる。)

例　(X, L) を主偏極アーベルタ様体とする。$(n, m) = 1$ を満たす自然数 n と整数 m の組に対し、$\delta(E_{n,m}) = [L^{\otimes m}]/n$ となる単純な s.h. ベクトル束 $E_{n,m}$ が存在して、

(1)　$r(E_{n,m}) = n^g$, $\chi(E_{n,m}) = m^g$

(2)　E' は s.h. で $\delta(E') = [L^{\otimes m}]/n$ である

$\Leftrightarrow$ $E' \cong E_{n,m} \otimes L$　${}^{\exists}L \in Pic^{\circ}(X)$

(3)　$E_{n,m} \otimes L \cong E_{n,m} \otimes L' \Leftrightarrow L^{\otimes n} \cong L'^{\otimes n}$

が成り立つ。更に $NS(X) \cong \mathbb{Z}$ ならば $E_{n,m} \otimes L$ $(L \in Pic^{\circ}(X), n, m)$ でもって X 上の単純な s.h. ベクトル束は尽くされる。

§3 X 上のベクトル束を E とするとき.

<u>定義 2</u> X 上のベクトル束 F が E-potent
$\Leftrightarrow$ F は各 i に対して $F_i/F_{i-1} \cong E$ となるフィルターづけ

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_{n-1} \subset F_n = F$$

をもつ。また、全ての E-potent ベクトル束と零層からなる(連接層/X)の充満部分圏を $\mathcal{U}_{X,E}$ で表わす。

なお、"$\mathcal{O}_X$-potent" のことを unipotent と呼ぶ。また、$\mathcal{U}_{X,\mathcal{O}_X}$ は $\mathcal{U}_X$ と略す。

一般の s.h. ベクトル束に関して次の定理が成立する。

<u>定理 3</u> F を X 上のベクトル束とするとき、次は同値である。

(1) F は s.h. である。

(2) $\delta(E_i) = \delta(F)$ となる単純な s.h. ベクトル束 E_i ($i = 1, 2, \cdots n.$) と E_i-potent なベクトル束 F_i が存在して $F \cong \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ となる。

注意. (2) では明らかに $i \neq j$ ならば $E_i \neq$

E_j としてよい。そのようにすれば、$\{E_i\}$ $\{F_i\}$ は F によって一意的に決まる。

"F が homogeneous" と "F は s.h. かつ $\delta(F)=0$" は同値であるから次の定理は上の系である。しかし、上の定理の証明において本質的である。

<u>定理 4</u>　X 上のベクトル束 F に対して次は同値である。

(1)　F は homogeneous である。

(2)　$F \cong \bigoplus_{i=1}^{n} (M_i \otimes U_i)$　ここで、各 i に対し $M_i \in Pic^0(X)$　また U_i は unipotent なベクトル束。

この定理は $k = \mathbb{C}$ のとき connection の理論と関連して松島、森本両氏によって証明された定理の一部である。p が一般の時の (1) ⇒ (2) の証明は宮西［2］でなされた。unipotent ベクトル束については別の結果がある。［3］を参照されたい。

定理3より、s.h.ベクトル束を調べるには単純なs.h.ベクトル束Eに対する$\mathcal{U}_{X,E}$を調べればよいことがわかる。先づ unipotent なベクトル束Uに対して$\alpha(U)=U\otimes E$となる自然な関手$\alpha=\alpha_E:\mathcal{U}_X\longrightarrow\mathcal{U}_{X,E}$を考えよう。

<u>命題4</u>　Eを単純なs.h.ベクトル束とする。$p=0$ 或は $(r(E),p)=1$ ならばα_Eは圏同値をみちびく。

<u>証明</u>　命題3の(1)より5-補題を使うことによって、任意 unipotent なベクトル束W，全てのjに対して $H^j(W\otimes i);H^j(W)\longrightarrow H^j(W\otimes \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(E))$ は全単射であることがわかる。$U,V\in\mathcal{U}_X$に対して、上で$W=\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(U\ V)\ (\cong U^\vee\otimes V)$，$j=0,1$とおくことによって

$$① \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(U,V)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(U\otimes E,V\otimes E),$$

$$② \quad H^1(X,\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(U,V))\xrightarrow{\sim}H^1(X,\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(U\otimes E,V\otimes E)).$$

がえられる。①はαが充満埋めこみであることを示している。②は$\alpha(U)$の$\alpha(V)$による

extension が全て U の V による extension からえられることを示している。このことを使えば任意の F に対して $\alpha(U) \cong F$ となる U の存在することが $r(F)$ の帰納法でもって証明される。

(証明終り)

次に $\pi ; Y \to X$ をアーベル多様体間の同種写像、L を Y 上の直線束、$E = \pi_*(L)$ とする。Y 上の unipotent なベクトル束 U に対して $\beta(U) = \pi_*(L \otimes U)$ とする自然な関手

$\beta = \beta_{\pi, L} ; \mathcal{U}_Y \to \mathcal{U}_{X, E}$ が考えられる。

<u>命題5</u>　π が分離的で E が単純なとき、β は圏同値をみちびく。

(証明の方針は命題4と同じ。)

注意　命題4からは a) $p = 0$ 或は $(r(E), p) = 1$ のとき、命題3の(2)と命題5よりは b) X の p-rank が最大のとき、各々、定理3の(2) ⇒ (1) が定理4を使って示すことができる。(一般の場合は別の方法を使わないとできないように思える。)

最後に定理3の (1) ⇒ (2) の証明の概略を述べておく。

Fをs.h.ベクトル束とする。先づ

(i) $r_X^*(F) \cong \det(F)^{\otimes r} \otimes H$ (ここにHはhomogeneousベクトル束。$r = r(F)$とした。)

を使って

(ii) Fは(任意のアンプルな直線束に対して) semi-stable。

を示す。(ii)より各iに対して$E_i = F_i/F_{i-1}$がstableでかつ$\chi(F(m))/r(F) = \chi(E_i(m))/r(E_i)$となるようなフィルターづけ

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_{n-1} \subset F_n = F$$

が存在する。順序を除けば$E_1, \cdots, E_n$はFに対して一意的に決まる。このことから

(iii) 各E_iはs.h.ベクトル束でかつ$\delta(E_i) = \delta(F)$。

であることがわかる。次の命題 ($j = 1$のとき) より

iv) Fが直既約ならば、E_iは全て互いに同型である。

が示されて証明が終る。

<u>命題 6</u>　E, E' は共に単純な s.h. ベクトルで $\delta(E) = \delta(E')$ であるとする。$E \neq E'$ ならば全ての j に対して $H^j(X, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(E, E')) = 0$ である。

参考文献

[1] M. F. Atiyah, Vector bundles over an elliptic curve, Proc. London Math. Soc., 7 (1957), 414-452.

[2] M. Miyanishi, Some remarks on algebraic homogeneous vector bundles "秋月記念号" 紀伊國屋, 東京 (1973), 71-93.

[3] S. Mukai, Semi-homogeneous vector bundles on an abelian varieties, to appear in Kyoto Math. J.

[4] T. Oda, Vector bundles on an elliptic curve, Nagoya Math. J., 43 (1971), 41-72.